

# TD EM1

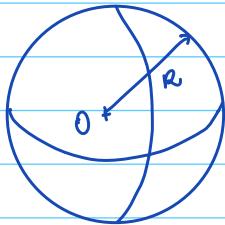
**SF1**

cf cours

**SF2**

modèle 1

On considère une sphère de masse volumique uniforme  $\rho_0$   
On utilisera les coordonnées sphériques



+  $n$

Tous les plans contenant le vecteur  $\vec{n}$  sont  
plans de symétrie pour la distribution de masse  
Donc  $\vec{g}'(n) = g(n) \vec{u}_r$

Pour ailleurs la masse volumique est indépendante  
de  $\theta$  et  $\phi$ , donc  $\vec{g}'(n) = \vec{g}(n)$

au final  $\vec{g}(n) = g(r) \vec{u}_r$ .

On choisit comme surface de Gauss la sphère de centre O et de  
rayon  $r$ .

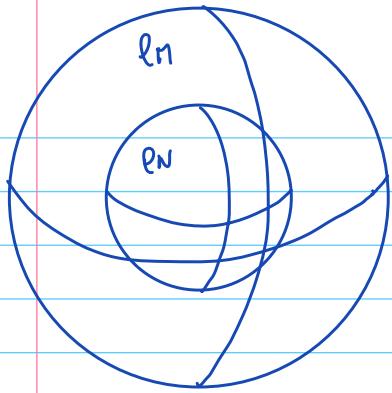
On a  $\oint \vec{g} \cdot d\vec{s} = -4\pi G M_{int}$

$$4\pi r^2 g(r) = \begin{cases} -4\pi G \rho_0 \frac{4}{3} \pi R^3 & \text{si } r > R \\ -4\pi G \rho_0 \frac{4}{3} \pi r^3 & \text{si } r < R \end{cases}$$

Alors

$$\vec{g}(n) = \begin{cases} -G \frac{4}{3} \pi \rho_0 \frac{R^3}{r^2} \vec{u}_r & \text{si } r > R \\ -G \frac{4}{3} \pi \rho_0 r \vec{u}_r & \text{si } r < R. \end{cases}$$

Modèle 2



d'études des invariances et symétrie est la même

$$\vec{g}(r) = g(r) \vec{u}_r$$

On choisit donc la même surface de Gauss

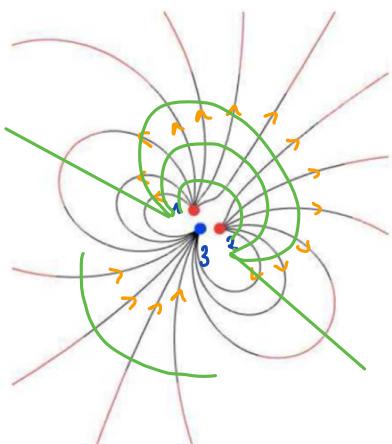
or  $\oint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G \rho_{\text{int}}$

$$4\pi r^2 g(r) = \begin{cases} -4\pi G \rho_N \frac{4}{3}\pi r^3 & \text{si } r < R_N \\ -4\pi G \left( \rho_N \frac{4}{3}\pi R_N^3 + \rho_n \frac{4}{3}\pi (r^3 - R_N^3) \right) & \text{si } R_N < r < R_n \\ -4\pi G \left( \rho_N \frac{4}{3}\pi R_N^3 + \rho_n \frac{4}{3}\pi (R_n^3 - R_N^3) \right) & \text{si } r > R_n \end{cases}$$

au final

$$\vec{g}(r) = \begin{cases} -G \rho_N \frac{4}{3}\pi r \vec{u}_r & \text{si } r < R_N \\ -G \frac{4}{3}\pi \left( (\rho_N - \rho_n) \frac{R_N^3}{r^2} + \rho_n r \right) \vec{u}_r & \text{si } r \in [R_N, R_n] \\ -G \frac{4}{3}\frac{\pi}{r^2} \left( (\rho_N - \rho_n) R_N^3 + \rho_n R_n^3 \right) \vec{u}_r & \text{si } r > R_n. \end{cases}$$

SF3



- 1) On voit qu'aucune ligne de champ ne relie 1 et 2 qui sont donc probablement de mè charge  
1 et 2 sont donc les H  
3 est donc le O
- 2) les ldc vont des charges positives vers les négatives  
O est bien plus électronegatif que H
- 3) les espaces potentielles sont perpendiculaires aux lignes de champ.

## Exercice 3 - Cylindres concentriques

1) des plans  $(\mu, \vec{u}_z, \vec{u}_r)$  et  $(\eta, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  sont plans de symétrie de la distribution  
 On a donc  $\vec{E}(\eta) = E(\eta) \vec{u}_r$ .

Pour autres, la distribution est invariante par translation selon  $(0, \vec{u}_z)$  et par rotation  
 autour de  $(0, \vec{u}_z)$ , donc  $\vec{E}(\eta) = E(\eta) \vec{u}_r$

On considère le cylindre de rayon  $r$  et de hauteur  $h$ . Appliquons le théorème de Gauss :

$$\phi_\epsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{bat}} E(\eta) dS + \iint_{\text{disque haut}} \sigma(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_z + \iint_{\text{bas}} E(\eta) \vec{u}_r \cdot dS (-\vec{u}_z)$$

$$= 2\pi r h E(\eta).$$

$$\text{et si } r < R_1, Q_{\text{int}} = \int_{n=0}^{n=r} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^h -\alpha r' dr' d\theta dz \\ = -2\pi h \alpha \int_0^r r'^2 dr' = -2\pi h \alpha \left[ \frac{1}{3} r'^3 \right]_0^r$$

$$\text{si } r < R_1, Q_{\text{int}} = -\frac{2\pi h \alpha}{3} r^3.$$

$$\bullet \text{ si } r \in [R_1, R_2], Q_{\text{int}} = -\frac{2}{3} \pi h \alpha R_1^3$$

$$\bullet \text{ si } r > R_2, Q_{\text{int}} = -\frac{2\pi}{3} h \alpha R_1^3 + 2\pi h R_2 \sigma$$

au final : 
$$\vec{E}(\eta) = \begin{cases} -\frac{\alpha}{3\epsilon_0} r^2 \vec{u}_r & \text{si } r < R_1, \\ -\frac{\alpha}{3\epsilon_0} \frac{R_1^3}{r} \vec{u}_r & \text{si } r \in [R_1, R_2[ \\ \left( -\frac{\alpha}{3\epsilon_0} \frac{R_1^3}{r} + \sigma \frac{R_2}{\epsilon_0 r} \right) \vec{u}_r & \text{si } r > R_2. \end{cases}$$

$$2) \text{ en } r = R_1 : \vec{E}(R_1^-) = -\frac{\alpha}{3\epsilon_0} R_1^2 \hat{r}$$

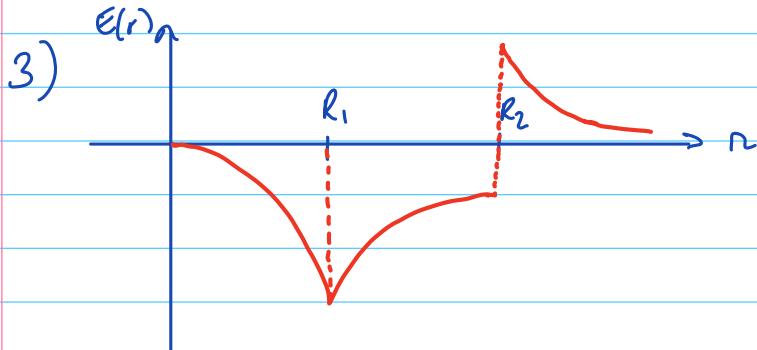
$$\vec{E}(R_1^+) = -\frac{\alpha}{3\epsilon_0} \frac{R_1^3}{R_1} \hat{r} = -\frac{\alpha}{3\epsilon_0} R_1^2 \hat{r}$$

$\rightarrow \vec{E}$  est continue en  $R_1$ . Logique car la distribution est volumique.

$$\text{en } r = R_2 : \vec{E}(R_2^-) = -\frac{\alpha}{3\epsilon_0} \frac{R_1^3}{R_2} \hat{r}$$

$$\vec{E}(R_2^+) = \left( -\frac{\alpha}{3\epsilon_0} \frac{R_1^3}{R_2} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \right) \hat{r}$$

$\vec{E}$  est discontinue en  $R_2$ . Logique car la distribution est alors superficielle.



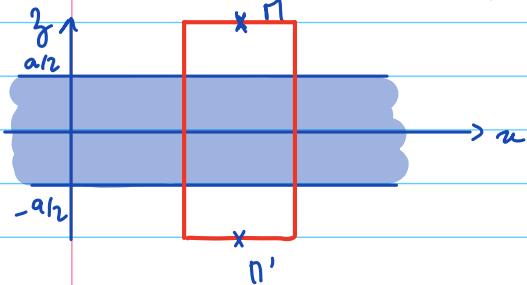
## Exercice 4 - Plan épais

1) Tous les plans contenant  $(n, \vec{u}_y)$  sont plans de symétrie, donc  
 $\vec{E}(n) = E(n) \vec{u}_y$

Par ailleurs, la distribution est invariante par translation selon  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$   
donc  $\vec{E}(n) = \vec{E}(z)$

au final  $\vec{E}(n) = E(z) \vec{u}_y$

2) Considérons un cylindre de rayon  $R$ , d'axe  $(n, \vec{u}_y)$  et tel que  
*M et n soient sur les disques aux extrémités*



On a  $\phi_z = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_{\text{haut}} E(z) \cdot dS + \iint_{\text{bas}} -E(-z) dS$

or le plan  $(0, \vec{u}_n, \vec{u}_y)$  est plan de symétrie pour la distribution et on a montré que  $\vec{E}$  est forté par  $\vec{u}_y$

Alors  $E(z) = -E(-z)$

et  $\phi_z = 2\pi R^2 E(z)$

Par ailleurs  $\Phi_z = \begin{cases} \pi R^2 a \rho_0 & \text{si } |z| > \frac{a}{2} \\ \pi R^2 \rho_0 & \text{si } |z| < \frac{a}{2}. \end{cases}$

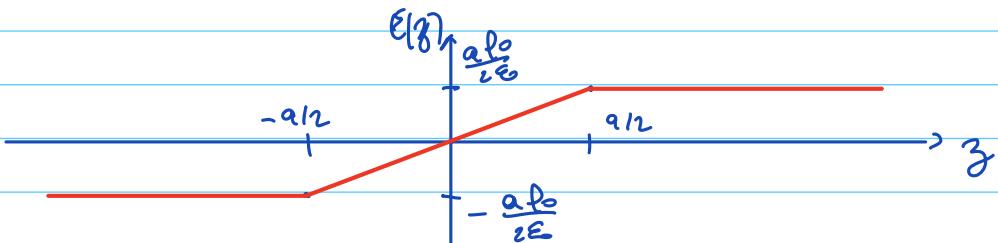
au final, on a donc

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{a \rho_0}{2\varepsilon_0} \vec{u}_y & \text{si } z > \frac{a}{2} \\ \frac{a \rho_0}{\varepsilon_0} \vec{u}_y & \text{si } -\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2} \\ -\frac{a \rho_0}{2\varepsilon_0} \vec{u}_y & \text{si } z < -\frac{a}{2}. \end{cases}$$

3) On a montré que  $\vec{E}(z=0) = \vec{0}$

C'est logique car on a  $\vec{E}$  parti par  $\vec{n}_y$ , mais le plan  $(x_0y)$  étant plan de symétrie, si  $n \in (x_0y)$ ,  $\vec{E}(n) \in (x_0y)$ . Pour avoir simultanément  $\vec{E}(z=0) \in (x_0y)$  et  $\vec{E}(z=0) \parallel \vec{n}_y$ , il faut  $\vec{E}(z=0) = \vec{0}$ .

4)



Le champ est continu en  $z = \pm a/2$ , ce qui est cohérent avec une modélisation de distribution de charge cylindrique.

5) On veut que  $\sigma_0 S = \alpha S p_0$

$$\text{Donc } \sigma_0 = \alpha p_0$$

On a alors pour le champ  $\vec{E}$ :

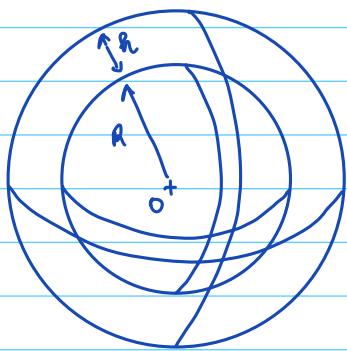
$$\vec{E}(n) = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{n}_z & \text{si } z > 0 \\ -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{n}_z & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

(oh ! résultat du cours !)

6) On a maintenant une discontinuité de  $\vec{E}$  en  $z=0$ , logique avec une modélisation de distribution de charge surfacique

## Exercice 5 - Puissance transportée par un éclair

1) On se place en coordonnées sphériques



des plans  $(\Pi, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  et  $(\Pi, \vec{u}_r, \vec{u}_\phi)$  dont plans de symétrie. Donc  $\vec{E}(n) = E(n) \vec{u}_r$

Pour ailleurs, la distribution est invariante par rotation autour de O

$$\text{Donc } \vec{E}(n) = \vec{E}(n)$$

$$\text{Au final } \vec{E}(n) = E(n) \vec{u}_r.$$

On choisit comme surface du gaiss la sphère de rayon  $r$  et de centre O.

$$\text{On a } \Phi_z = \oint_z \vec{E} \cdot d\vec{s} = 4\pi r^2 E(n)$$

$$\text{Et } \Theta_\Sigma = \begin{cases} 0 & \text{si } r < R \\ -Q & \text{si } r \in [R, R+h] \\ 0 & \text{si } r > R+h \end{cases}$$

$$\text{On a donc } \vec{E}(n) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } r < R \\ -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r & \text{si } r \in [R, R+h] \\ \vec{0} & \text{si } r > R+h \end{cases}$$

$$2) \text{ On a } \vec{E} = -\vec{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r$$

d'ionosphère correspond à  $r = R + h$ . On peut y écrire

$$-\frac{dV}{dr} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\text{Donc } V(n) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 n} + \text{cte}$$

$$\text{Or } V(R) = 0, \text{ donc } -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \text{cte} = 0$$

$$\text{Ainsi } \forall n \in [R, R+h], V(n) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{R} \right)$$

$$\text{En particulier } V(R+h) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R+h} - \frac{1}{R} \right)$$

$$V(R+h) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{l}{R(R+h)}.$$

$$3) \text{ Par définition } C = \frac{Q}{V - 0} = \frac{R(R+h)}{h} \frac{4\pi\epsilon_0}{l}$$

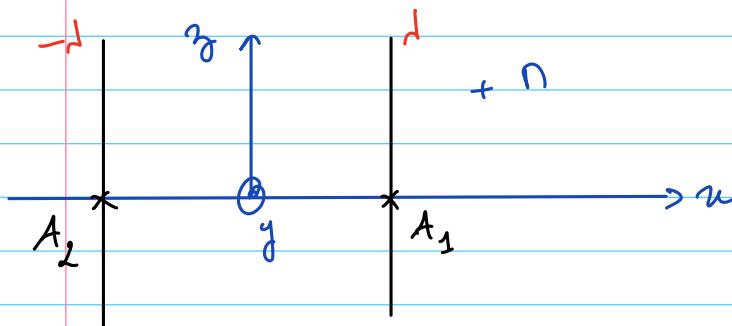
$$4) \text{ On a } R+h \approx R, \text{ donc } C = \frac{R^2}{h} \frac{4\pi\epsilon_0}{l} = 7,6 \cdot 10^{-5} F$$

On reconnaît l'expression de  $C$  pour des plans infinis.  $h$  est assez petit devant  $R$  pour qu'on ne "voit pas" la courbure de la Terre.

$$5) \text{ On a } P = U \times I = V \times I = \frac{Q}{C} \times I = \frac{I \Delta t}{C} \times I = 3 \cdot 10^{11} W$$

↑  
ici, on suppose que l'éclair  
décharge entièrement  
l'ionosphère  
c'est peu probable, mais on n'a  
pas d'autre info.

## Exercice 6 - lecture de carte de champ



1) On considère un fil seul sur l'axe ( $O_z$ ) portant la distribution linéique  $d$ .

Dans le repère cylindrique, on a les plans  $(n, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$  et  $(n, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  plans de symétrie de la distribution de charge. Ainsi  $\vec{E}(n) = E(n) \vec{e}_r$ .

Pour ailleurs, la distribution est invariante par translation selon  $\vec{e}_z$  et par rotation autour de l'axe ( $O_z$ ). Donc  $\vec{E}(n) = E(n) \vec{e}_r$

On considère un cylindre fermé de hauteur  $h$ , d'axe ( $O_z$ ) et de rayon  $r$  comme surface de Gauss.

$$\text{On a } \Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E(n) 2\pi r h$$

$$\text{et } Q_E = \lambda h$$

$$\text{On a donc } E(n) 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \text{ et } E(n) = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \text{ et enfin } \vec{E}(n) = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \vec{e}_r$$

2) Pour un seul fil, on a  $\vec{E} = -\operatorname{grad} V$

$$\text{ie } \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} = -\frac{dV}{dr} \text{ et } V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln r + \text{cte}$$

Ainsi le potentiel créé par un fil ne dépend que de la distance du point  $n$  au fil.  
On a donc

$$V_1(n) = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln r_1 + \text{cte} \text{ et } V_1(0) = 0 = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln a + \text{cte}$$

$$\text{donc } V_1(n) = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln \left( \frac{r_1}{a} \right)$$

$$\text{et } V_2(n) = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln r_2 + \text{cte}' = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln \left( \frac{r_2}{a} \right) \text{ de même.}$$

Par théorème de superposition,  $V(n) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left( \ln\left(\frac{n_2}{a}\right) - \ln\left(\frac{n_1}{a}\right) \right)$

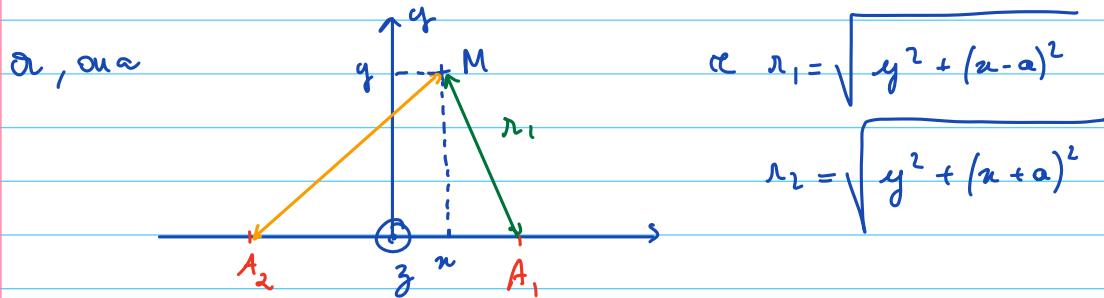
$$V(n) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

3) Soit M tq  $V(n) = V_0$

$$\text{ic } \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = V_0$$

$$\text{ic } \frac{n_2}{n_1} = k = \exp\left(\frac{2\pi\epsilon_0 V_0}{1}\right)$$

$$\text{ic } n_2 = k n_1$$



$$\text{On a donc } y^2 + (x+a)^2 = k^2 (y^2 + (x-a)^2)$$

$$\text{ic } y^2 (1-k^2) + x^2 + 2ax + a^2 - k^2 x^2 + 2k^2 ax - k^2 a^2 = 0$$

$$y^2 (1-k^2) + (1-k^2)x^2 + (1+k^2)2ax + (1-k^2)a^2 = 0$$

$$y^2 + a^2 + \frac{1+k^2}{1-k^2} 2ax + a^2 = 0$$

$$y^2 + a^2 + 2 \times a \times \frac{1+k^2}{1-k^2} a + \left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 a^2 - \left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 a^2 + a^2 = 0$$

$$y^2 + \left(a + \frac{1+k^2}{1-k^2} a\right)^2 = a^2 \left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 - a^2$$

On a bien l'équation d'un cylindre dans l'espace, d'axe  $(Oz)$  et d'intersection avec  $(x=0)$  le cercle de centre  $\left(\frac{1+k^2}{k^2-1} a, 0\right)$  et de rayon  $R$

$$\text{avec } R = a \sqrt{\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 - 1}$$

4) On retrouve les équipotentialles circulaires.

On a tiré les lignes de champ des charges positives vers les négatives

On a bien le plan ( $yOz$ ) plan d'antisymétrie  
( $xOy$ ) plan de symétrie

### Exercice 9 - fonction PN

$$1) \text{ On a } p_1 L_1 = - p_2 L_2 \quad \text{et} \quad p_1 = - p_2 \frac{L_2}{L_1}$$

$$2) \text{ Calculs} \rightarrow \vec{E}(z) =$$